

Được sử dụng 1 tờ giấy A4 tài liệu viết tay

Câu 1 (2 điểm)

a) Cấu trúc nghiệm hệ phương trình vi phân tuyến tính.

Xét hai hệ phương trình vi phân

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad (1) \text{ và } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1').$$

Biết hệ (1') có hệ nghiệm cơ bản

$$X_1 = \begin{pmatrix} e^{3t} \cos 4t \\ e^{3t} \sin 4t \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} e^{3t} \sin 4t \\ -e^{3t} \cos 4t \end{pmatrix}$$

và hệ (1) có nghiệm riêng $X_p = \begin{pmatrix} 4 \\ t+1 \end{pmatrix} e^{-2t}$.

Khi đó, nghiệm tổng quát hệ (1) là $X(t) = \dots$

(làm bài câu này Anh/Chị viết chính xác $X(t) = \dots$ vào giấy làm bài thi).

b) INTERACTING POPULATIONS MODEL.

Giả sử hai cộng đồng dân cư P, Q tương tác với nhau theo quy luật cạnh tranh ức chế tăng trưởng nhau, được mô hình **xấp xỉ** bởi hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = aP - bQ & a > 0, b > 0 \\ \frac{dQ}{dt} = -cP + dQ & c > 0, d > 0. \end{cases}$$

Cho biết $a = 7, b = 4, c = 3, d = 3, P(0) = 120$ (triệu), $Q(0) = 80$ (triệu) và đơn vị thời gian t là thế kỷ (100 năm). Giải hệ phương trình vi phân tìm $P(t), Q(t)$.

Theo mô hình trên, khoảng bao nhiêu năm thì một trong hai cộng đồng dân cư trên hầu như bằng 0 (bị triệt tiêu hay gần như tuyệt chủng)?

Câu 2 (3 điểm)

a) Bài toán **truyền sóng** một chiều **không thuần nhất**.

$PT: a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0 < x < \pi, t > 0 \quad (1)$ (Dao động của dây do tác động của trọng lực, g là gia tốc trọng trường)

$BC: u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0, t > 0 \quad (2)$ (Hai đầu dây cố định trên trục hoành (trục ngang))

$IC: u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (3)$ (vị trí ban đầu 0, vận tốc ban đầu 0).

Giải bài toán tìm $u(x, t)$.

b) Bài toán **truyền nhiệt** một chiều **thuần nhất**.

$PT: k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < L, t > 0 \quad (1)$

$BC: \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, t > 0 \quad (2)$

$IC: u(x, 0) = f(x), 0 < x < L. \quad (3)$

Anh/Chị hãy nêu tên các bước giải bài toán này.

(Bước 1: ...; Bước 2: ...; Bước 3: ...; Bước 4: ...).

Cho biết nghiệm bài toán dạng

$$u(x, t) = e^{-ht} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}} \cos \frac{n\pi x}{L} \right),$$

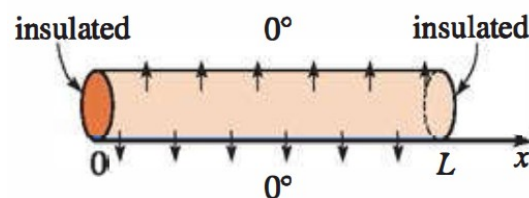
trong đó $A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx,$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$

(môi trường xung quanh ở nhiệt độ bằng 0° , nhiệt tỏa ra mặt xung quanh theo quy luật tuyến tính, và k, h là hằng số)

(hai đầu cách nhiệt)

(nhiệt độ ban đầu là $f(x)$)



(đơn vị bài này là $^\circ C$).

Tìm $u(x, t)$ khi biết $L = \pi, f(x) = \sin x$.

Câu 3 (5 điểm)

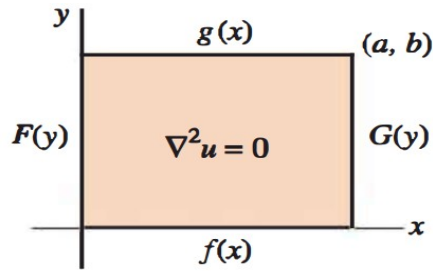
a) Phương trình Laplace, bài toán truyền nhiệt trạng thái dừng trong hình chữ nhật.

$$PT: \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (1)$$

$$BC: \begin{cases} u(0, y) = F(y), & u(a, y) = G(y) \\ u(x, 0) = f(x), & u(x, b) = g(x). \end{cases} \quad (2)$$

Giải bài toán tìm $u(x, y)$ biết $a = \pi, b = \pi$ và $f(x) = 100, g(x) = 200, F(y) = 160, G(y) = 250$

(đơn vị bài này là $^{\circ}C$).



(Steady Temperatures in a Rectangular Plate)

b) Phương trình Laplace trong tọa độ cực, bài toán truyền nhiệt trạng thái dừng trong $\frac{1}{4}$ đĩa tròn bán kính bằng c .

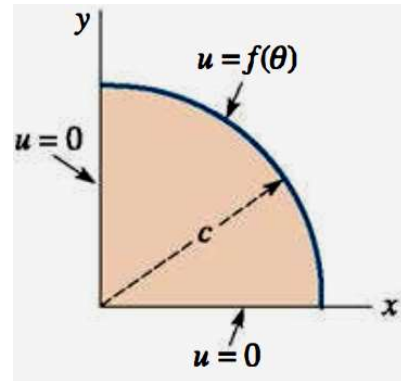
$$PT: \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < r < c, \quad 0 < \theta < \pi/2 \quad (1)$$

$$BC: \begin{cases} u(c, \theta) = f(\theta), & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ u(r, 0) = 0, & u(r, \pi/2) = 0, & 0 < r < c \end{cases} \quad (2)$$

Giải bài toán tìm $u(r, \theta)$ biết

$$f(\theta) = 100 + 4\theta, \quad c = 4.$$

(đơn vị bài này là $^{\circ}C$).



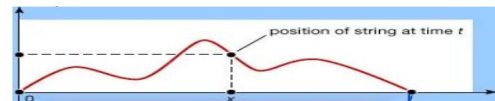
(Steady Temperatures in a Quarter-circular Plate).

c) Bài toán **truyền sóng một chiều thuần nhất**.

$$PT: a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$BC: u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

$$IC: u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L \quad (3) \quad (\text{vị trí ban đầu } f(x), \text{ vận tốc ban đầu } g(x)).$$



(hai đầu gắn chặt)

Giải bài toán tìm $u(x, t)$ biết $L = \pi$, $f(x) = \sin 2x + \sin 5x$ và $g(x) = a$.

Ghi chú

- Sinh viên được phép sử dụng các công thức nghiệm thiết lập khi học hay trong giáo trình.
- Cán bộ coi thi không giải thích đề thi.

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra học phần (về kiến thức)
Câu 1: Nắm vững cấu trúc nghiệm và giải được hệ phương trình vi phân tuyến tính, đồng thời hiểu được ý nghĩa các kết quả tìm được.	G1: 1.2 G2: 2.1.4, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5, 2.4.6, 2.4.7, 2.5.1.
Câu 2 & 3: Nhận dạng và giải được các bài toán truyền sóng, truyền nhiệt rồi ứng dụng vào kỹ thuật, công nghệ, thực tế đời sống.	G1: 1.2 ; G2: 2.1, 2.3 ; G2: 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5, 2.4.6, 2.4.7, 2.5.1.

Ngày 3 tháng 7 năm 2026

Thông qua Bộ môn Toán